

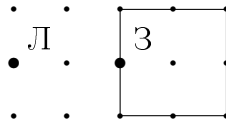
Преследование на плоскости

Задача 1. Покажите, что окружности Аполлония, построенные по точкам A и B , пересекаются с окружностями, проходящими через A и B , под прямым углом.

Задача 2. Пусть A и B — точки плоскости. Покажите, что множество точек X плоскости, для которых $AH/BH < r$, лежит по одну сторону от окружности Аполлония, построенной по отношению r , а множество точек, для которых $AH/BH > r$ — по другую сторону.

Задача 3. Начальные положения лисы и зайца изображены на рисунке. Предположим, что заяц движется по границе квадрата по часовой стрелке со скоростью 1, а лиса использует параллельную стратегию. Опишите траекторию лисы, место и время встречи, если

- а) скорость лисы равна 1;
- б) скорость лисы равна $\sqrt{2}$.



Следующие задачи листка не совсем просты, некоторые из них мы разберём на второй лекции. Но сначала их необходимо попробовать решить самим (иначе будет неинтересно)!

Задача 4. В центре квадрата сидит заяц, а в каждом из четырех углов — по волку. Выясните, может ли заяц выбежать из квадрата, если волки могут бегать только по сторонам квадрата с максимальной скоростью в v раз большей, чем максимальная скорость зайца, и

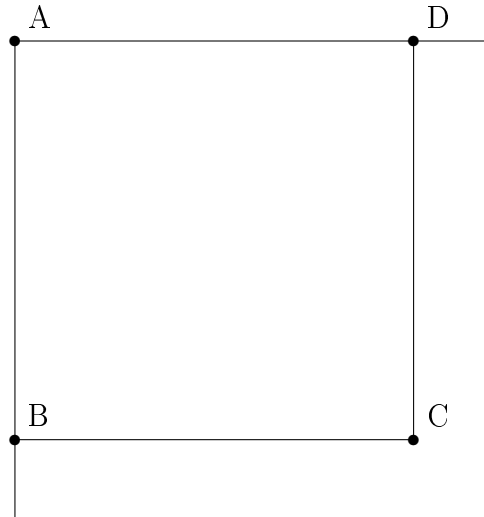
- а) $v < \sqrt{2}$;
- б) $v > \sqrt{2}$.

Задача 5. В центре квадрата сидит волк, а в вершинах сидят собаки. Волк может бегать по внутренности квадрата с максимальной скоростью 1, а собаки — только по сторонам квадрата с максимальной скоростью u . Известно, что волк задирает собаку, а две собаки задирают волка. Сможет ли волк выбежать из квадрата, если

- а) $u < \sqrt{2}$;
- б) $u > \sqrt{2}$?

Задача 6. На плоскости расположены 100 овец и волк, все они имеют форму точек. За один ход волк передвигается на расстояние, не большее 1, после этого одна из овец передвигается на расстояние, не большее 1, после этого снова ходит волк и т.д. При любом ли начальном расположении точек волк сможет поймать хотя бы одну из овец?

Задача 7. Лиса охотится за двумя зайцами, см. картинку. В вершине A квадрата находится нора: если в нее, в отсутствие лисы, попадает хотя бы один заяц, то игра для лисы проиграна. Лиса ловит зайца, как только оказывается с ним в одной точке. Вначале лиса сидит в точке C , а зайцы — в точках B и D . Лиса бежит повсюду со скоростью не большей v , а зайцы — по лучам AB и AD со скоростью, не большей 1. При каких значениях v лиса сможет поймать обоих зайцев?



Задача 8*. а) Бык гоняется за тореадором по круглой арене, их скорости равны. Перепрыгнуть через бортик ни один из них не может. Сможет ли бык настигнуть тореадора?
б) Почти та же задача: лягушка гоняется за кузнечиком по круглому острову на пруду. Они по очереди совершают прыжки, длина любого прыжка не более метра. Сможет ли лягушка поймать кузнечика?