

1. Степенные ряды

▷ *Формальным степенным рядом* называется (бесконечная) формальная запись вида $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$, где a_i — числа, а x — формальный символ.

1. Вычислите (найдите все коэффициенты)

а) $(1 + x + x^2 + \dots)^n$; б) $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8) \dots$

2. Вычислите а) $\frac{1}{1 - \alpha x}$; б) $\frac{1}{(1 - \alpha x)(1 - \beta x)}$ (при $\alpha \neq \beta$); в) $\frac{1}{1 - x - x^2}$ (2 способами).

3. Докажите, что при $a_0 \neq 0$ ряд $a_0 + a_1x + \dots$ обратим.

▷ Формальной экспонентой называется ряд $\exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^k}{k!} + \dots$.

4. Найдите $\exp(x \frac{d}{dx})$ (как оператор на многочленах).

5. Найдите первые несколько коэффициентов ряда $\text{td}(x) := \frac{x}{\exp(x) - 1}$ (достаточно дойти до коэффициента при x^3).

* * *

6*. а) $\exp(u + v) = \exp(u) \cdot \exp(v)$.

б) Единственная дифференцируемая функция такая, что $\exp(u + v) = \exp(u) \exp(v)$, $\exp(0) = 1$, $\exp'(0) = 1$, — это $\exp(x) = e^x$.

7*. а) Если $f'' = -f$, то $f^2 + (f')^2 = \text{const}$.

б) Если $f'' = -f$ и $f(0)^2 + f'(0)^2 = 1$, то $(\arcsin f)' = \pm 1$.

в) Если $f'' = -f$ и $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, то $f(x) = \sin x$.

г) Синус и косинус могут быть разложены в ряды:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots; \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

(Можно пользоваться без доказательства тем, что степенные ряды можно дифференцировать почленно.)