Неравенства (конспект)

Дмитриева А., Ионов К.

1 Занятие первое. Простые неравенства. Неравенства о средних.

- *Задача 1.* Докажите неравенство.

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 \geq 4xy + 6yz + 6zx$$

Решение: $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy - 6yz - 6zx = (x + 2y - 3z)^2$

- *Задача 2.* Докажите неравенство.

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz \geq 0$$

Решение: $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 2yz = (x + y + z)^2 + (x - y)^2$

- *Задача 3.* Докажите неравенство при $x \geq y$.

$$4x^3 + 2x^2y + 3xy^2 \geq 9y^3$$

Решение: $4x^3 + 2x^2y + 3xy^2 - 9y^3 = (x - y)(2x + 3y)^2$

- *Сложная задача подумать*

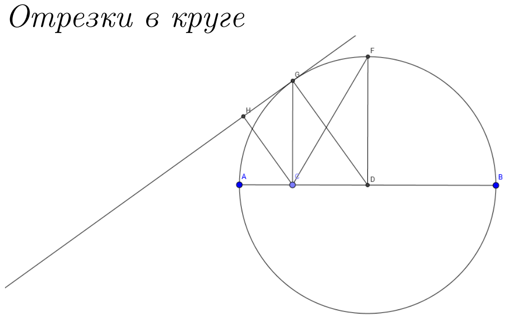
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} ... \frac{99}{100} ? \frac{1}{10}$$

- **Неравенства для двух чисел**
При $a, b \geq 0$:

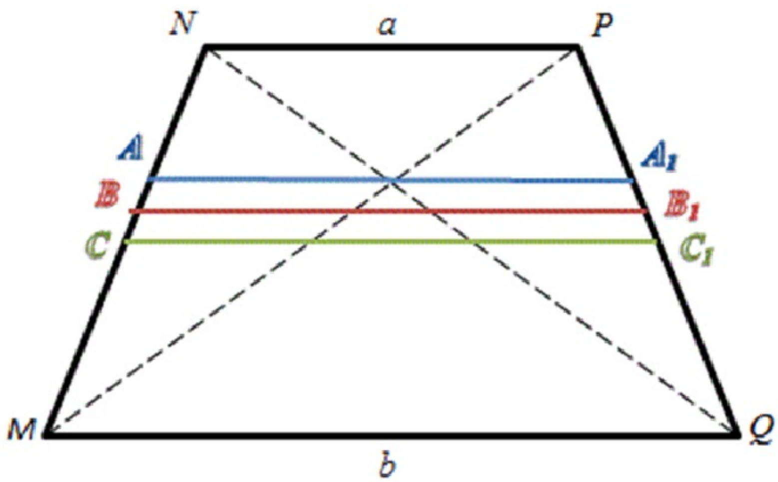
$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Доказательство и объяснение, когда достигается равенство
Огюстен Луи Коши (фр. Augustin Louis Cauchy; 21 августа 1789, Париж — 23 мая 1857, Со, Франция) — французский математик и механик, член Парижской академии наук, Лондонского королевского общества, Петербургской академии наук и других академий.

- *Отрезки в круге*



- *Иллюстрация неравенств на примере равнобокой трапеции*



AA_1 — среднее гармоническое;
BB_1 — среднее геометрическое, делит трапецию на 2 подобные;
CC_1 — среднее арифметическое.
DD_1 — среднее квадратичное, делит на 2 равновеликие

- *Неравенство о сумме обратных.*

$$a + \frac{1}{a} \geq 2$$

Пример использования: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$
Способ решения: Пусть $x = a + b, y = b + c, z = a + c$. Тогда $a = \frac{y+z-x}{2}, b = \frac{x+z-y}{2}, c = \frac{x+y-z}{2}$.
Тогда $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{y+z-x}{2x} + \frac{x+z-y}{2y} + \frac{x+y-z}{2z} = \frac{1}{2}(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} - 3) \geq \frac{1}{2}(6-3) = \frac{3}{2}$

- *Пример 1*: Доказать неравенство

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + u^4}{4} \geq xyzu$$

Способ решения:

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + u^4}{4} = \frac{\frac{x^4+y^4}{2} + \frac{z^4+u^4}{2}}{2} \geq \frac{x^2y^2 + z^2u^2}{2} \geq xyzu$$

- *Пример 2*: Доказать неравенство

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \geq 2; a > 0, b > 0, c > 0$$

Способ решения:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c} \cdot 1} \geq \frac{2}{\frac{b+c}{a} + 1} = \frac{2a}{a+b+c}$$

Сложим 3 симметричных неравенства и получим искомое.

- *Пример 3*: Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz \\ x^{57} + y^{57} + z^{57} = 3. \end{cases}$$

Способ решения: Неравенство $x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$ становится равенством титтк $x = y = z$.
Тогда из второго уравнения получаем $x = y = z = 1$.
Важное неравенство пишем сверху.

- textitЗадача из листочка: Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию $xyz \geq xy+yz+zx$.
  Докажите неравенство
  $$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

2 Занятие второе. Неравенства о средних, метод Штурма.

- **Неравенство о средних для n переменных**
  При $a_1, ..., a_n \geq 0$:
  $$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+...a_n^2}{n}}$$
  Равенство достигается титтк $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

- *Доказательство неравенства Коши индукцией.*
  1. Доказываем для n = 4, выводим для n = 3.
  2. Индукцией по m докажем $\frac{a_1+a_2+...+a_{2^m}}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{a_1a_2...a_{2^m}}$.
  База доказана. Переход:
  $$\frac{a_1+a_2+...+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} = \frac{a_1+a_2+...+a_{2^m}}{2^{m+1}} + \frac{a_{2^m+1}+...+a_{2^{m+1}}}{2^{m+1}} \geq \frac{\sqrt[2^m]{a_1a_2...a_{2^m}} + \sqrt[2^m]{a_{2^m+1}...a_{2^{m+1}}}}{2}$$
  (из предположения индукции)
  $$\frac{\sqrt[2^m]{a_1a_2...a_{2^m}} + \sqrt[2^m]{a_{2^m+1}...a_{2^{m+1}}}}{2} \geq \sqrt{\sqrt[2^m]{a_1a_2...a_{2^m}} \cdot \sqrt[2^m]{a_{2^m+1}...a_{2^{m+1}}}} = \sqrt[2^{m+1}]{a_1a_2...a_{2^{m+1}}}$$
  (из неравенства Коши для двух чисел)
  Равенство достигается титтк $\begin{cases} a_1 = ... = a_{2^m} \\ a_{2^m+1} = ... = a_{2^{m+1}} \Leftrightarrow a_1 = ... = a_{2^{m+1}} \\ \sqrt[2^m]{a_1a_2...a_{2^m}} = \sqrt[2^m]{a_{2^m+1}...a_{2^{m+1}}} \end{cases}$
  3. Докажем, что если неравенство верно для $n+1$, то оно верно и для n.
  Применим неравенство для $n+1$ к $a_1, a_2, ...a_n$ и S_n, где $S_n = \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.
  Получим $(\frac{a_1+a_2+...+a_n+S_n}{n+1})^{n+1} \geq a_1a_2...a_nS_n$.
  Но $S_n = \frac{a_1+a_2+...+a_n+S_n}{n+1}$, следовательно, $S_n^{n+1} \geq a_1a_2...a_nS_n$.
  Значит, $S_n^n \geq a_1a_2...a_n$, то есть $(\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n})^n \geq a_1a_2...a_n$.
  Равенство достигается титтк $a_1 = a_2 = ... = a_n = S_n \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$

- *Вывод неравенства о среднем гармоническом.*
  В доказанное неравенство $\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} \leq \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ подставим $x_i = \frac{1}{a_i}$.
  Получим $\frac{1}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}} \leq \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}{n}$.
  Перевернем неравенство и получим $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.
  Равенство достигается титтк $\frac{1}{a_i} = const \Leftrightarrow a_i = const$

- *Пример 1.1*: доказать неравенство при x,y,z > 0
  $$(x+y+z)(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}) \geq 9$$
  Причем равенство достигается лишь при x = y = z.

Способ решения:

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{xyz}}$$

Перемножим, сократим и получим искомое.

- *Пример 1.2*: доказать неравенство при $\forall i : x_i > 0$

$$(x_1+x_2+...+x_n)(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}) \geq n^2$$

Причем равенство достигается лишь при $x_1 = x_2 = ... = x_n$.

Способ решения:

$$x_1+x_2+...+x_n \geq n\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n} \geq n\frac{1}{\sqrt[n]{x_1x_2...x_n}}$$

Перемножим, сократим и получим искомое.

- *Пример 2*: $(1+\frac{1}{2016})^{2016} < (1+\frac{1}{2017})^{2017}$

Решение: Запишем неравенство Коши для чисел $\underbrace{(1+\frac{1}{2016}),(1+\frac{1}{2016})...(1+\frac{1}{2016})}_{2016}, 1$.

Получаем $\frac{(1+\frac{1}{2016})+...+(1+\frac{1}{2016})+1}{2017} > \sqrt[2017]{(1+\frac{1}{2016})^{2016}} \Rightarrow (1+\frac{1}{2017})^{2017} > (1+\frac{1}{2016})^{2016}$.
Так доказывается, что последовательность $(1+\frac{1}{n})^n$ возрастает, что является важным фактом в математическом анализе.

- **Метод Штурма**

Шарль Франсуа Штурм (фр. Charles-François Sturm; 29 сентября 1803, Женева, Швейцария, — 15 декабря 1855, Париж, Франция) — французский математик.

- *Лемма 1*: Пусть $x_1, x_2...x_n > 0$. Тогда $x_1 \cdot x_2...x_n = 1 \Rightarrow x_1+x_2+...+x_n \geq n$, причем равенство достигается титтк $x_1 = ... = x_n = 1$.
Доказательство: Заметим, что если $x_1 = ... = x_n = 1$, то $x_1+x_2+...+x_n == n$.
Пусть есть хотя бы два не равных друг другу числа. Тогда найдутся два числа (например, x_1 и x_2), такие что $x_1 < 1$, $x_2 > 1$.
Заметим, что $x_1+x_2 > 1+x_1x_2 \Leftrightarrow (x_2-1)(1-x_1) > 0$.
Тогда заменив x_1, x_2 на $1, x_1x_2$, мы не изменим произведение, но уменьшим сумму.

$$x_1+x_2+...+x_n \geq 1+x_1x_2+...+x_n$$

Продолжив совершать такие замены, получим $\underbrace{1,1...1}_{\text{n - 1}}$ и $x_1x_2..x_n = 1$.

Тогда $x_1+x_2+...+x_n > \underbrace{1+1+...+1}_{\text{n}} = n$.

- *Доказательство неравенства Коши через метод Штурма.*
Подставим в Лемму 1 $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}}$, их произведение равно 1.
Получаем $x_1+x_2+...+x_n \geq n$, то есть $a_1+a_2+...+a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n} \Rightarrow \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.
Равенство достигается титтк $\forall i$: $x_i = 1 \Leftrightarrow a_i = \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$, то есть $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

- *Лемма 2*: $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq \frac{1}{n}$
  (нельзя решить через неравенство Коши, так как нет условия положительности)
  Доказательство: Заметим, что если $x_1 = ... = x_n = \frac{1}{n}$, то $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = \frac{1}{n}$.
  Пусть есть хотя бы два не равных друг другу числа. Тогда найдутся два числа (например, x_1 и x_2), такие что $x_1 < \frac{1}{n}$, $x_2 > \frac{1}{n}$.
  Заметим, что $x_1^2 + x_2^2 > (\frac{1}{n})^2 + (x_1 + x_2 - \frac{1}{n})^2 \Leftrightarrow (x_2 - \frac{1}{n})(\frac{1}{n} - x_1) > 0$
  Тогда заменив x_1, x_2 на $\frac{1}{n}, x_1 + x_2 - \frac{1}{n}$, мы не изменим сумму, но
  $$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 > (\frac{1}{n})^2 + (x_1 + x_2 - \frac{1}{n})^2 + ... + x_n^2$$
  Продолжив совершать такие замены, получим $\underbrace{\frac{1}{n}, \frac{1}{n} ... \frac{1}{n}}_{\text{n - 1}}$ и $x_1 + x_2 + ... + x_n - \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$.
  Тогда $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 > \underbrace{(\frac{1}{n})^2 + (\frac{1}{n})^2 + ... + (\frac{1}{n})^2}_{\text{n}} = \frac{1}{n}$.

- *Доказательство неравенства о среднем квадратическом.*
  Подставим в Лемму 2 $x_i = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$, их сумма равна 1.
  Получаем $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 \geq \frac{1}{n}$, то есть $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 \geq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + ... a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$.
  Равенство достигается титтк $\forall i$: $x_i = 1 \Leftrightarrow a_i = a_1 + a_2 + ... + a_n$, то есть $a_1 = a_2 = ... = a_n$.
  Заметим, что данное неравенство верно и для случаев с отрицательными а.

- *Пример 3*: Докажите, что $0 \leq xy + yz + xz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$,где $x, y, z \geq 0$ и $x + y + z = 1$.
  Решение: Пусть $x \geq y \geq z$. Тогда $y \leq \frac{1}{2}$.
  Тогда $xy + yz + xz - 2xyz = y(x + z) + xz(1 - 2y) \geq 0$.
  Заметим, что $y(x+z) + xz(1-2y) \leq y(\frac{1}{3} + (x+z-\frac{1}{3})) + \frac{1}{3}(x+z-\frac{1}{3})(1-2y) \Leftrightarrow xz \leq \frac{1}{3}(x+z-\frac{1}{3}) \Leftrightarrow 0 \leq (x - \frac{1}{3})(\frac{1}{3} - z)$, что верно, так как $x \geq y \geq z$.
  Значит, делая замену x, z на $\frac{1}{3}, x + z - \frac{1}{3}$, мы не изменяем сумму, но увеличиваем выражение.
  Заметим, что $y + (x + z - \frac{1}{3}) = \frac{2}{3}$. Значит, одно из чисел y и $x + z - \frac{1}{3}$ больше $\frac{1}{3}$, а другое меньше.
  В таком случае проведем эту операцию с числами $y, \frac{1}{3}, x + z - \frac{1}{3}$.
  Получим числа $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, x + z - \frac{1}{3} + y - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$
  Значит, $xy + yz + xz - 2xyz \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} - 2\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{27}$

3 Занятие третье. Решение задач.

- **Разбор задач из первого листа**

- *Задача 1:* Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию $xyz \geq xy + yz + zx$. Докажите неравенство
$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$
Решение: Условие равносильно
$$\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq 1$$
Тогда из неравенства $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ac$ следует $(\frac{1}{\sqrt{x}})^2+(\frac{1}{\sqrt{y}})^2+(\frac{1}{\sqrt{z}})^2 \geq \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{z}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{z}}$, то есть $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{xy}}$.
Тогда $\frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{xz}} + \frac{1}{\sqrt{xy}} \leq \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq 1$.

- *Задача 1.2:* Докажите неравенство для $a, b, c > 0$:
$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a} \geq a + b + c.$$
Решение: Замена $z = \sqrt{\frac{ab}{c}}, y = \sqrt{\frac{ac}{b}}, x = \sqrt{\frac{bc}{a}}$ сводит неравенство к неравенству $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$.

- *Задача 2:* Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ac = 1$ Докажите, что
$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$
Решение: Заметим, что $a + \frac{1}{a} = a + \frac{ab+bc+ac}{a} = a + b + c + \frac{bc}{a}$.
Применяя неравенство Коши для чисел a и $\frac{bc}{a}$, получим $a + \frac{1}{a} \geq b + c + 2\sqrt{bc} = (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2$.
То есть $\sqrt{a + \frac{1}{a}} \geq \sqrt{b} + \sqrt{c}$, следовательно, $\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$.

- **Решение задач**

- *Задача 1*: Докажите, что если $0 < a, b < 1$, то $\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} < \frac{1}{4}$.
(Всероссийская олимпиада по математике, 1996, 9 класс (4 этап))
Решение: Пусть $u = \sqrt{ab}, v = a + b$.
Тогда $\frac{ab(1-a)(1-b)}{(1-ab)^2} = \frac{u^2(1-v+u^2)}{(1-u^2)^2}$.
По неравенству Коши $v \geq 2u$, следовательно, $\frac{u^2(1-v+u^2)}{(1-u^2)^2} \leq \frac{u^2(1-2u+u^2)}{(1-u^2)^2} = \frac{u^2}{(1+u)^2}$.
$0 < u < 1 \Rightarrow 0 < \frac{u}{1+u} < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{u^2}{(1+u)^2} < \frac{1}{4}$.

- *Задача 2:* Действительные числа a, b, c, d, по модулю большие единицы, удовлетворяют соотношению $abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0$. Докажите, что
$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0$$
Решение: Пусть $x = \frac{a+1}{a-1}, y = \frac{b+1}{b-1}, z = \frac{c+1}{c-1}, t = \frac{d+1}{d-1}$. Эти числа положительные, так как a, b, c, d по модулю больше единицы.
Заметим, что $abc + abd + acd + bcd + a + b + c + d = 0 \Leftrightarrow (a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1) \Leftrightarrow xyzt = 1$.
Теперь заметим, что $\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} = \frac{x-1}{2} + \frac{y-1}{2} + \frac{z-1}{2} + \frac{t-1}{2} = \frac{x+y+z+t-4}{2}$.

Значит, требуется доказать $x + y + z + t > 4$.
По неравенству Коши $x + y + z + t \geq 4\sqrt[4]{xyzt} = 4$.
Равенство достигается титтк $x = y = z = t$, то есть, тк $xyzt = 1$, $x = y = z = t = 1$.
Но $x, y, z, t > 1$, значит, $x + y + z + t > 4$.

- *Задача 3:* Докажите неравенство для $a, b, c > 0$:

  $$abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b).$$

  Решение: Без ограничения общности можно считать $a \leq b \leq c$.
  Заметим, что $abc \geq (a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \Leftrightarrow (b - c)^2(b + c - a) \geq a(a - b)(c - a)$.
  Это неравенство верно, так как $(b - c)^2(b + c - a) \geq 0 \geq a(a - b)(c - a)$.

- *Задача 4:* Докажите неравенство $x(x - z)^2 + y(y - z)^2 \geq (x - z)(y - z)(x + y - z)$, где $x, y, z > 0$.
  Решение: Заметим, что $x(x - z)^2 + y(y - z)^2 \geq (x - z)(y - z)(x + y - z) \Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - x^2y - xy^2 - x^2z - xz^2 - y^2z - yz^2 + 3xyz \geq 0$.
  Это неравенство симметрично, значит, можно считать $x \geq z \geq y$.
  Тогда $x(x - z)^2 + y(y - z)^2 \geq 0 \geq (x - z)(y - z)(x + y - z)$.

- *Задача 5:* Докажите неравенство $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 > 0$.
  Решение: Если $x \leq 0$, все слагаемые положительны.
  Если $0 < x < 1$, $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = x^8 + x^2(1 - x^3) + (1 - x) > 0$.
  Если $x \geq 1$, $x^8 - x^5 + x^2 - x + 1 = x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1 > 0$.